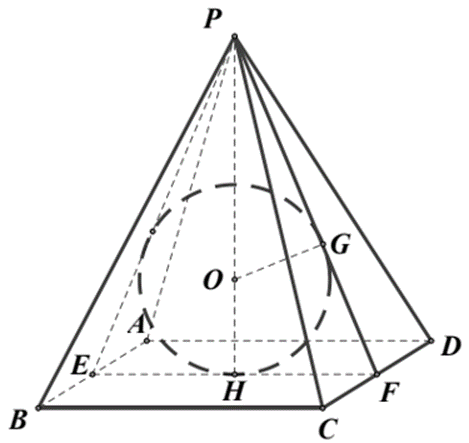
**专题12 多面体的外接球和内切球**

**一、结论**

**1．球与多面体的接、切**

定义1；若一个多面体的各顶点都在一个球面上，则称这个多面体是这个球的内接多面体，这个球是多面体的外接球。

定义2；若一个多面体的各面都与一个球的球面相切，则称这个多面体是这个球的外切多面体，这个球是多面体的内切球。

**类型一 球的内切问题（等体积法）**

例如：在四棱锥中，内切球为球，求球半径.方法如下：



即：，可求出.

**类型二 球的外接问题**

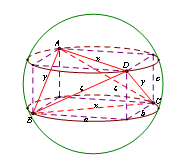
**1、公式法**

正方体或长方体的外接球的球心为其体对角线的中点

**2、补形法（补长方体或正方体）**

①墙角模型（三条线两个垂直）

题设：三条棱两两垂直（重点考察三视图）

学科网(www.zxxk.com)--教育资源门户，提供试题试卷、教案、课件、教学论文、素材等各类教学资源库下载，还有大量丰富的教学资讯！ 学科网(www.zxxk.com)--教育资源门户，提供试题试卷、教案、课件、教学论文、素材等各类教学资源库下载，还有大量丰富的教学资讯！ 学科网(www.zxxk.com)--教育资源门户，提供试题试卷、教案、课件、教学论文、素材等各类教学资源库下载，还有大量丰富的教学资讯！

②对棱相等模型（补形为长方体）

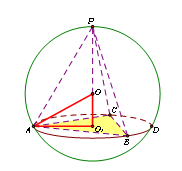
题设：三棱锥（即四面体）中，已知三组对棱分别相等，求外接球半径（，，）

**3、单面定球心法（定+算）**

步骤：①定一个面外接圆圆心：选中一个面如图：在三棱锥中，选中底面，确定其外接圆圆心（正三角形外心就是中心，直角三角形外心在斜边中点上，普通三角形用正弦定理定外心）；

②过外心做（找）底面的垂线，如图中面,则球心一定在直线（注意不一定在线段上）上；

③计算求半径:在直线上任取一点如图：则，利用公式可计算出球半径.



**学科网(www.zxxk.com)--教育资源门户，提供试题试卷、教案、课件、教学论文、素材等各类教学资源库下载，还有大量丰富的教学资讯！4、双面定球心法（两次单面定球心）**

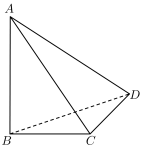
如图：在三棱锥中：

①选定底面，定外接圆圆心

②选定面，定外接圆圆心

③分别过做面的垂线，和做面的垂线，两垂线交点即为外接球球心.

**二、典型例题**

1．（2022·山西吕梁·一模（文））在《九章算术·商功》中，将四个面都为直角三角形的四面体称为鳖臑，如图在鳖臑中，平面，，，则鳖臑内切球的表面积为（ ）

A． B．

C． D．

【答案】B

【解析】

解：因为四面体四个面都为直角三角形，平面，，所以，，，，设四面体内切球的球心为，则，

所以，

因为四面体的表面积为，

又因为四面体的体积，

所以，所以，

故选：B

**【反思】本例中涉及到求内切球问题，典型的等体积法.**

2．（2021·四川省南充高级中学高二期中（文））在三棱锥*P*－*ABC*中，，，两两垂直，，，，则该三棱锥的外接球的表面积为（ ）

A． B． C． D．

【答案】D

【解析】

将三棱锥*P*－*ABC*补全为长方体，则长方体的外接球就是所求的外接球，设球半径为R，则，所以球的表面积为．

故选：D．

**【反思】由题意**，，**两两垂直，可直接用补形法，补成长方体，利用长方体求外接球.**

3．（2021·全国·高一课时练习）已知三棱锥，在底面中，，，面，，则此三棱锥的外接球的表面积为（ ）

A． B． C． D．

【答案】D

【解析】

设的外接圆半径为*R*，因为，，由正弦定理得：，所以的外接圆半径为1，设的外接圆圆心为，过点做的平行线，则球心一定在该直线上，设为，因为面，，由于，故，由勾股定理得：，即此三棱锥的外接球的半径为2，故外接球表面积为.



故选：D

**【反思】此题典型的单面定球心求外接球的问题，先确定的外接圆圆心，再过做的平行线，则可确定球心在该直线上，进而通过计算求出外接球半径.**

学科网(www.zxxk.com)--教育资源门户，提供试题试卷、教案、课件、教学论文、素材等各类教学资源库下载，还有大量丰富的教学资讯！4.三棱锥中，平面平面，和均为边长为的正三角形，则三棱锥外接球的半径为 .

【解析】:由于是正三角形，并且边长为2，所以的外接圆圆心为,则,,同理可得的外接圆圆心为，可得到，,分别过做面的垂线，过做面的垂线交于，因为平面平面，所以四边形为正方形，且,利用勾股定理：，所以.

**【反思】此题典型的双面定球心，由于选定的面，都是正三角形，故其外心都是中心，如果是普通三角形，可以采用正弦定理定外心.**

**三、针对训练 举一反三**

一、单选题

1．（2021·湖北黄冈·高一期末）若圆锥的内切球(球面与圆锥的侧面以及底面都相切)的半径为，当该圆锥体积是球体积两倍时，该圆锥的高为（　　）

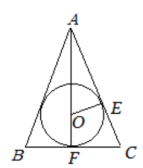
A． B． C． D．

【答案】B

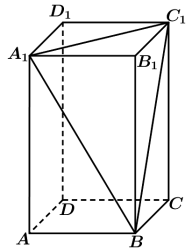
如下图组合体的轴截面，设圆锥半径为，圆锥高为，则，，，由得,代入得①，

由“该圆锥体积是球体积两倍”可知，即②，联立两式得.

故选:B



2．（2021·青海·海南藏族自治州高级中学高三开学考试（理））如图正四棱柱中，底面面积为36，的面积为，则三棱锥的外接球的表面积为（ ）



A． B． C． D．

【答案】C

【详解】

设正四棱柱的高为，

因为正方形的面积为36，所以，

在中，由勾股定理得，

在中，由勾股定理得，,

因为的面积为，

所以，解得，

依题意，三棱锥的外接球即为正四棱柱的外接球，

其半径为，

所以三棱锥的外接球的表面积为．

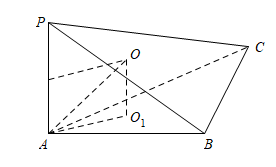
故选：C．

3．（2022·全国·高三专题练习）已知四面体中，平面，，，且，则四面体的外接球的表面积为（ ）

A． B． C． D．

【答案】B

解：如图所示：



在中，，

又且，

故解得：，

由余弦定理得：，

即，

故，

设的外接圆半径为，

则，

设的外接圆圆心为，四面体的外接球球心为，

则，

四面体的外接球的表面积为：.

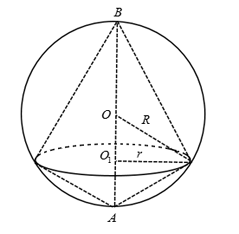
故选：B.

4．（2021·江苏·金陵中学高一期末）前一段时间，高一年级的同学们参加了几何模型的制作比赛，大家的作品在展览中获得了一致好评．其中一位同学的作品是在球当中放置了一个圆锥，于是就产生了这样一个有趣的问题：已知圆锥的顶点和底面圆周都在球面上，若圆锥的侧面展开图的圆心角为，面积为，则球的表面积等于（ ）

A． B． C． D．

【答案】A

【详解】



圆锥的顶点和底面圆周都在球面上，圆锥的侧面展开图的圆心角为，面积为，

设母线为，则，可得：，

由扇形的弧长公式可得：，所以，

圆锥的高，

由，解得：，

所以球的表面积等于，

故选：A

5．（2021·云南·弥勒市一中高二阶段练习）设直三棱柱的所有顶点都在一个球面上，且球的体积是，，，则此直三棱柱的高是（ ）

A．1 B．2 C． D．4

【答案】B

【详解】

设，

三角形外接圆的半径为，直三棱柱外接球的半径为.

因为，所以，

于是，，.

又球心到平面的距离等于侧棱长的一半，所以.

在中，由，得，.

所以球的体积，解得.

于是直三棱柱的高是.

故选：B.

6．（2021·重庆·西南大学附中高一期末）已知正方形中，，是边的中点，现以为折痕将折起，当三棱锥的体积最大时，该三棱锥外接球的表面积为（ ）

A． B． C． D．

【答案】C

【详解】

解：过*D*作于，设点为的外心，为的中点，连接，

因为正方形中，，是边的中点，

所以,则，，,

所以,，,

所以,

所以,

设棱锥的外接球球心为，半径为，则平面，设，

因为的面积为定值，所当高最大时，三棱锥的体积最大，

此时平面平面，

因为，平面平面，

所以平面，

所以,

所以，

所以，

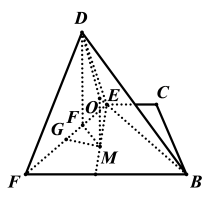
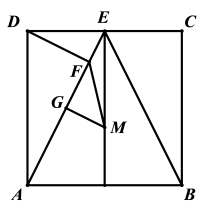
所以，解得，

所以的外心为三棱锥外接球的球心，

所以

所以三棱锥外接球的表面积为

故选：C



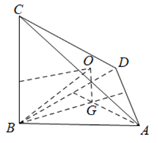
7．（2021·广西·柳铁一中高三阶段练习（理））在三棱锥中，，，，，则三棱锥外接球的表面积为（ ）

A． B． C． D．

【答案】D

【详解】

如图，



由，，得，∴，

由，，，得，∴，

又，∴平面，设的外心为*G*，过*G*作底面的垂线，

使，则*O*为三棱锥外接球的球心，

在中，由，，得，

，设的外接圆的半径为*r*，

则，，

∴.

∴三棱锥外接球的表面积为.

故选：D.

8．（2021·江西省南丰县第二中学高一学业考试）已知四棱锥，平面，，，，，二面角的大小为.若四面体的四个顶点都在同一球面上，则该球的体积为（ ）

A． B． C． D．

【答案】A

【详解】

因为，，所以，所以，

所以外接圆的圆心为的中点，记为，过作直线使得平面，

取中点，过作垂足为，则，

所以为四面体外接球的球心，

因为，所以平面，，

又，所以二面角的平面角为，所以，

因为，所以，所以，

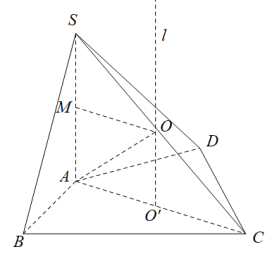
所以，

又因为，

所以，

所以四面体外接球的体积为，

故选：A.



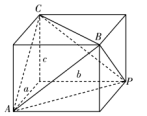
二、填空题

9．（2022·河南焦作·一模（理））已知三棱锥的每条侧棱与它所对的底面边长相等，且是底边长为，面积为的等腰三角形，则该三棱锥的外接球的表面积为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【详解】

三棱锥可以嵌入一个长方体内，且三棱锥的每条棱均是长方体的面对角线，如图，



设，，长方体交于一个顶点的三条棱长为，，，则，解得.

由题得，

，，

解之得，，.

所以该三棱锥的外接球的半径为，

所以该三棱锥的外接球的表面积为.

故答案为：

10．（2022·河南驻马店·高三期末（文））在三棱锥中，底面是以为斜边的等腰直角三角形，，，则三棱锥外接球的表面积为\_\_\_\_\_\_．

【答案】##

【详解】

如图，取的中点，连接，．由题意可得，

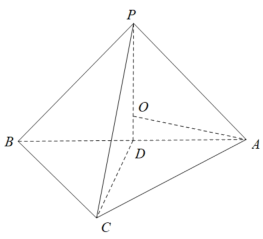
因为，所以，

因为，所以，所以，所以，

即．因为，所以平面，

设三棱锥外接球的球心为，

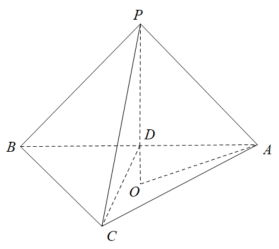
由题意易得三棱锥外接球的球心在线段上，如下图



则三棱锥外接球的半径满足，

解得，所以，；

若三棱锥外接球的球心在线段的延长线上，如下图，



则三棱锥外接球的半径满足，

，无解；

所以，

三棱锥外接球的表面积．

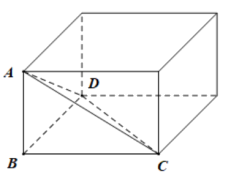
故答案为：.

11．（2022·全国·模拟预测（理））已知*A*、*B*、*C*、*D*为空间不共面的四个点，且，则当三棱锥体积最大时，其外接球的表面积为\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【详解】

当*BA*、*BC*、*BD*两两垂直时，如图三棱锥的底面的面积和高同时取得最大值，则三棱锥的体积最大，



此时将三棱锥补形为一个长宽高分别为，，的长方体，

长方体的外接球即为三棱锥的外接球，

球的半径，表面积为．

故答案为：.

12．（2022·安徽马鞍山·一模（理））三棱锥中，是边长为的等边三角形，，平面平面，则该三棱锥的外接球的体积为\_\_\_\_\_\_

【答案】

【详解】

等边三角形的高为，

等边三角形的外接圆半径为

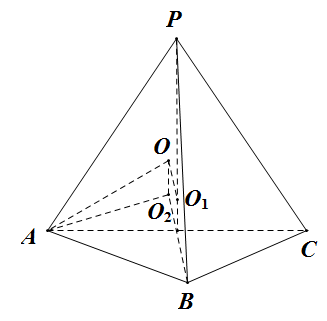
三角形的外接圆半径为，

设分别是等边三角形、等边三角形的中心，

设是三棱锥的外接球的球心，是外接球的半径，

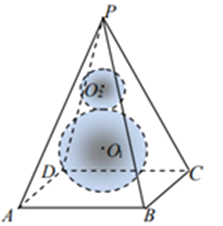
则，

所以外接球的体积为.



故答案为：

13．（2021·湖北荆州·高一期中）如图，在一个底面边长为2，侧棱长为的正四棱锥中，大球内切于该四棱锥，小球与大球及四棱锥的四个侧面相切，则小球的表面积为\_\_\_\_\_\_．



【答案】

【解析】

【详解】

设*O*为正方形*ABCD*的中心，*AB*的中点为*M*，连接*PM*，*OM*，*PO*，则，，，

如图，在截面*PMO*中，设*N*为球与平面*PAB*的切点，则*N*在*PM*上，

且，设球的半径为*R*，则，

∵，∴，则，，∴，

设球与球相切于点*Q*，则，

设球的半径为*r*，同理可得，∴，

故小球的表面积.

故答案为：

